はじめに

離散凸解析では，離散変数の関数で凸関数に似た性質をもつものや，連続変数の関数で何らかの離散構造をもつものを考察する．交換公理に基づく M 凸関数と劣モジュラ性に基づく L 凸関数の概念を中心として，いろいろな種類の離散凸関数が考察される．M 凸関数の「M」は Matroid（マトロイド）の頭文字，L 凸関数の「L」は Lattice（束）の頭文字である．

「離散凸解析 (discrete convex analysis)」の名称は，1998 年に室田 [217] で提唱され，M 凸関数と L 凸関数を中心とする離散凸解析の全体像は，モノグラフ（2001 年和文 [219]，2003 年英文 [220]）の形にまとめられた．その後 20 年を経過して，理論の整備が進み，応用も広がった．本書では，近年の進展を踏まえて，理論を体系的に展開するとともに，応用の例として，離散凸解析の概念と定理が経済学の問題にどのように利用できるかを述べる．

本書は 3 部から成る．第 I 部では，経済学的概念との対応を示しながら，M 凹集合関数（$\approx \{0,1\}$ ベクトルを変数とする M 凹関数）の理論を述べる．第 II 部では，整数ベクトルを変数とする関数に対する離散凸解析の理論を，2010 年以降の進展を含めて，体系的に詳しく述べる．第 III 部は経済学への応用である．本書を読むために離散数学や経済学の特別の知識は不要であり，拙著 [219, 220] の内容の理解も前提としていない．専門領域に依らない数理的な感性（のようなもの）に従って読み進めて頂きたい．なお，証明の詳細や応用分野の背景知識などについて参照すべき文献は具体的に示してある．巻末には主な記号をまとめてあるので，適宜参照されたい．

本書で扱う話題を中心に離散凸解析の歴史を示すと，次の年表のようになる．経済学と関係の深い事項には $*$ 印をつけた（第 III 部で扱う話題である）．マトロイドの発見（1935 年）から劣モジュラ性と凸性の議論（1983 年）を経て離散凸解析の提唱（1998 年）に至る経緯については，詳しい記述が [219, 第 1.3 節], [220, 第 1.1.2 項] にある．ジャンプシステム上の M 凸関数（2006 年）とグラフ構造上の L 凸関数（2015 年）については「おわりに」で触れる．

年頃	項目	主な人名	文献
1935	マトロイド	Whitney, 中澤	[262, 328]
1965	劣モジュラ関数	Edmonds	[54]
1969	凸費用ネットワーク流	伊理	[139]
1983	劣モジュラ性と凸性	Frank, 藤重, Lovász	[68, 79, 181]
1985	マルチモジュラ関数	Hajek	[97]
1990	付値マトロイド	Dress・Wenzel	[48, 50]
1990	整凸関数	Favati・Tardella	[61]
1995	付値マトロイド交差	室田	[211, 212]
1996	M 凸関数（M 凸交差）	室田	[213]
1998	**離散凸解析の提唱**（L 凸関数，共役性，双対性）	室田	[217]
1999	$\mathrm{M}^{\natural}$ 凸関数	室田・塩浦	[233]
2000	$\mathrm{L}^{\natural}$ 凸関数	藤重・室田	[84]
2000	連続変数の M 凸関数，L 凸関数	室田・塩浦	[234, 238]
2000	劣モジュラ関数最小化アルゴリズム	岩田・Fleischer・藤重, Schrijver	[148, 284]
2001	∗ 不可分財の競争均衡	Danilov・Koshevoy・室田	[43]
2001	「離散凸解析/Discrete Convex Analysis」の出版	室田	[219, 220]
2003	∗ 粗代替性 ⇔ $\mathrm{M}^{\natural}$ 凹性	藤重・Yang	[86]
2006	ジャンプシステム上の M 凸関数	室田	[223]
2007	∗ マッチング市場への応用	藤重・田村	[85]
2013	∗ オークションへの応用	Yang, 塩浦, 室田	[247, 297]
2015	離散 DC 関数	前原・室田	[185]
2015	グラフ構造上の L 凸関数	平井	[111, 113]
2020	離散凸集合上の公平配分	Frank・室田	[72, 74, 75]
2020	整凸関数の双共役性	室田・田村	[255, 256]

∗印は経済学と関係の深い事項である．

$\mathrm{M}^{\natural}$ はエム・ナチュラル，$\mathrm{L}^{\natural}$ はエル・ナチュラルと読む．