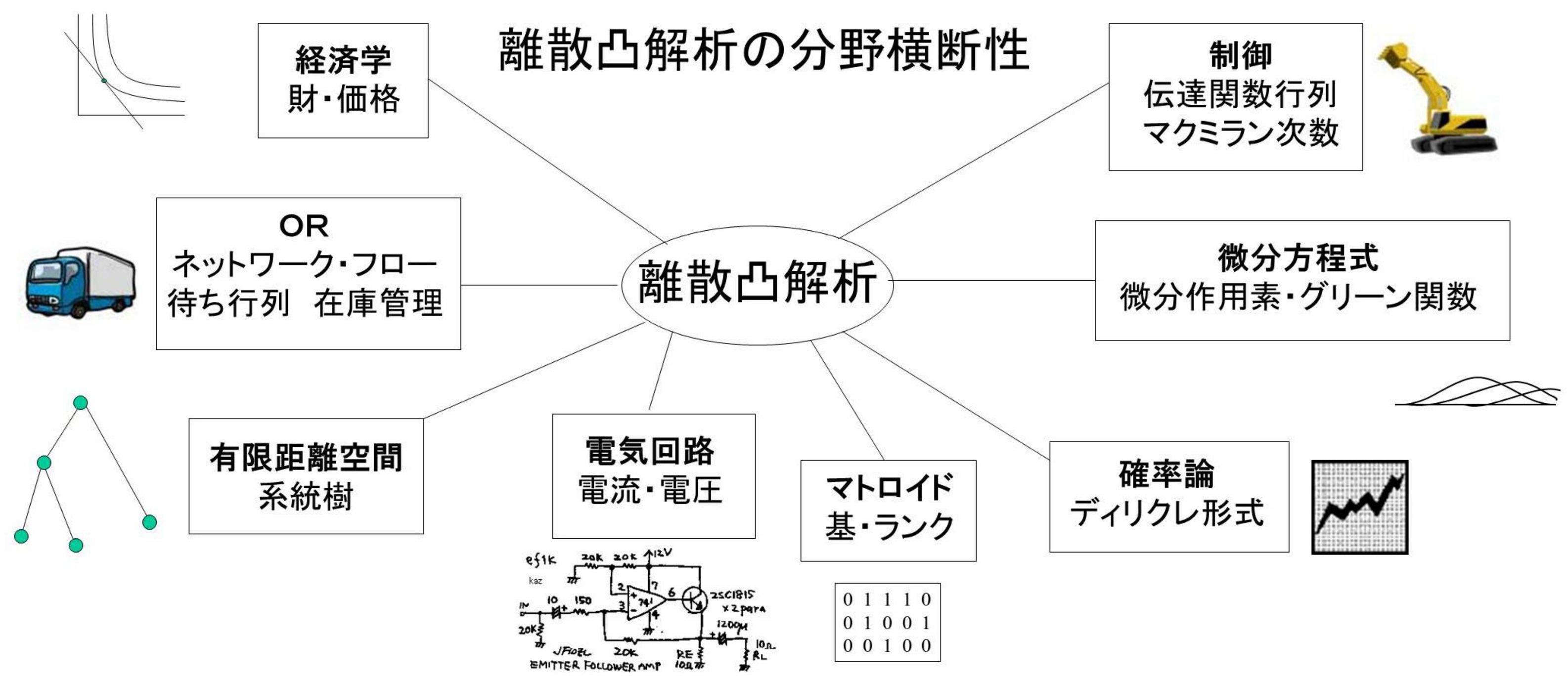
離散凸解析

室田　一雄　　統計思考院　特任教授

1．離散凸解析は，整数格子点の集合の上で定義された関数を，凸解析と組合せ論の両方の視点から考察する理論であり，離散最適化，オペレーションズ・リサーチ，システム解析，ゲーム理論，数理経済学，離散幾何などへの応用がある．M凸関数，L凸関数の概念，共役性および双対性が理論の骨格であり，種々の問題に対してアルゴリズムが開発されている．



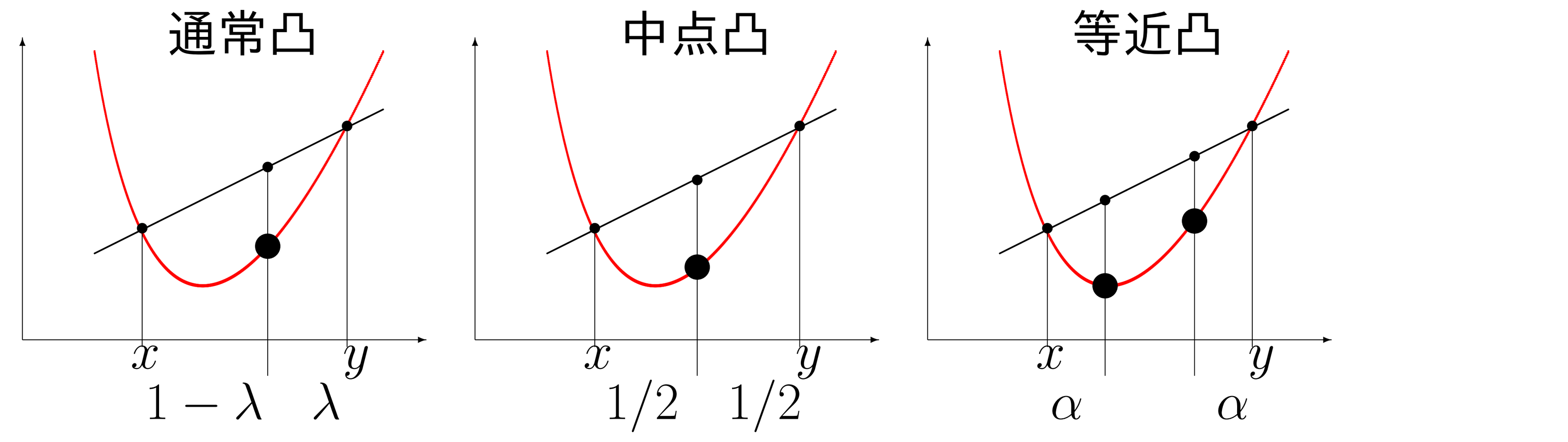
2．離散凸解析は「凸関数に似た離散構造」と「離散構造をもつ凸関数」の両方を扱うことを目指している．連続変数の凸関数の定義を適切に離散化することによって，M凸関数やL凸関数といった離散凸関数の概念が定義される．

離散化への準備として，通常の凸関数の性質に着目する：

通常凸　$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\geq f(\lambda x+(1-\lambda)y)\quad(0\leq\lambda\leq 1)$

⇔ 中点凸　$f(x)+f(y)\geq 2f(\frac{x+y}{2})$

⇔ 等近凸　$f(x)+f(y)\geq f(x-\alpha(x-y))+f(y+\alpha(x-y))\quad(0\leq\alpha\leq 1)$

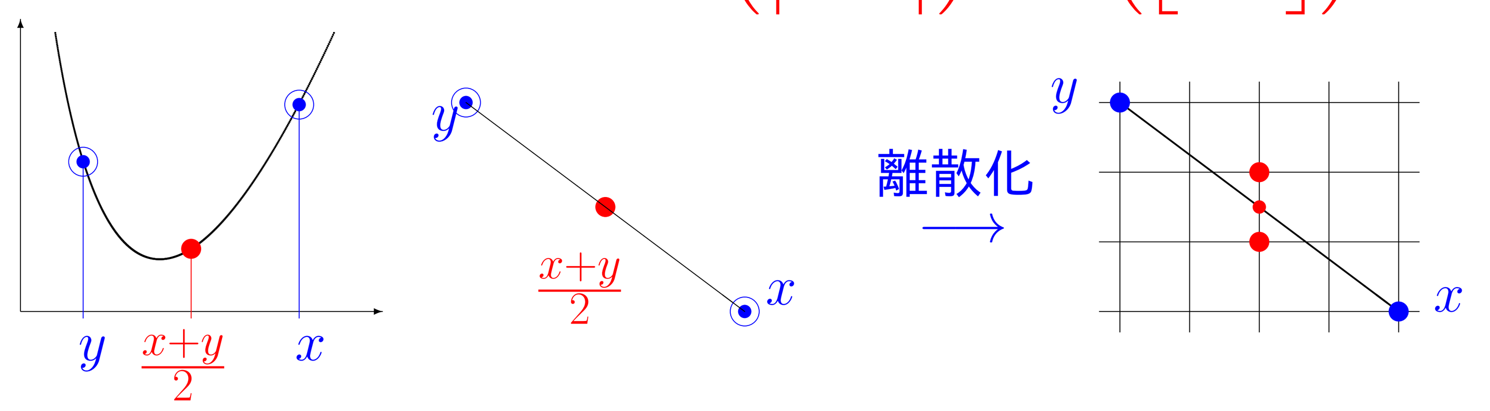


中点凸性と等近凸性を離散化することにより，離散変数の関数 $f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$ に対して，L$^\natural$凸関数とM$^\natural$凸関数の概念が定義される．L は 束(Lattice), M は マトロイド(Matroid)を表し，$\natural$は「ナチュラル」と読む．

連続変数 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$		離散変数 $\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$	
中点凸性	$\longrightarrow$	離散中点凸性	L$^\natural$凸関数
$\Updownarrow$	離散化		
凸 性			
$\Updownarrow$	離散化		
等近凸性	$\longrightarrow$	交換公理	M$^\natural$凸関数

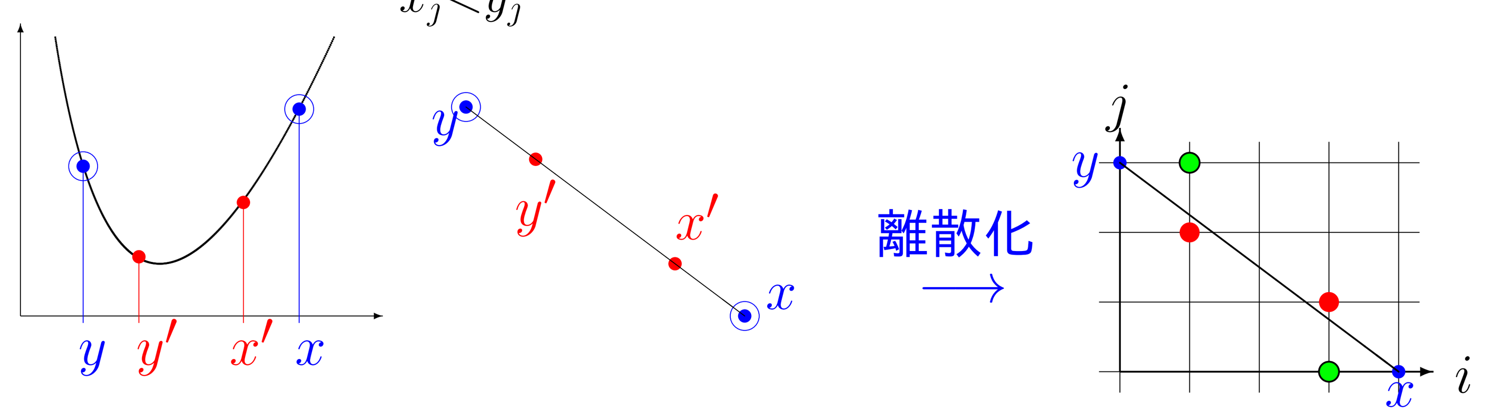
定義：$f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$ がL$^\natural$凸関数 $\Longleftrightarrow$ 離散中点凸:

$$f(x)+f(y)\geq f\left(\left\lceil\frac{x+y}{2}\right\rceil\right)+f\left(\left\lfloor\frac{x+y}{2}\right\rfloor\right)$$



定義：$f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$ がM$^\natural$凸関数 $\Longleftrightarrow$ 交換公理：　$\forall x,y,\ \forall i:x_i>y_i$

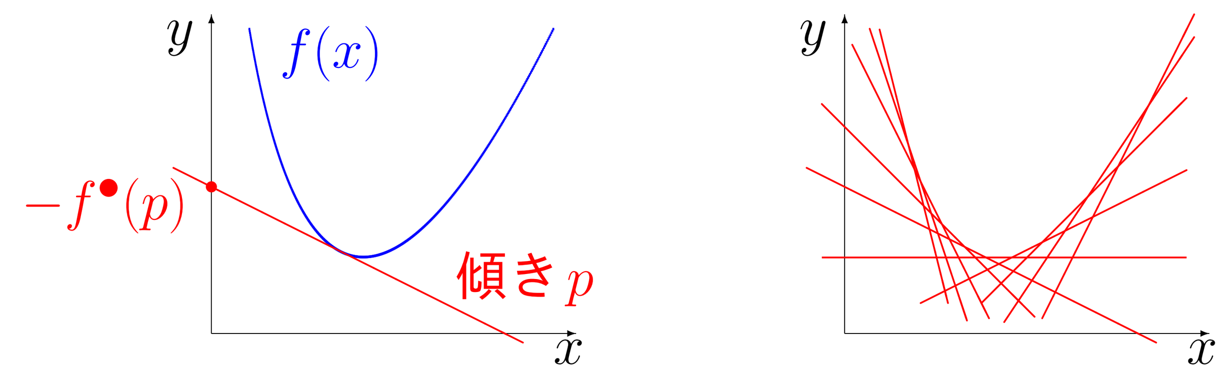
$$f(x)+f(y)\geq\min\left[f(x-e_i)+f(y+e_i),\ \min_{x_j<y_j}\{f(x-e_i+e_j)+f(y+e_i-e_j)\}\right]$$



3．整数値の離散凸関数 $f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{Z}$ に対して，その離散ルジャンドル変換を

$$f^\bullet(p)=\max\{p\cdot x-f(x)\mid x\in\mathbf{Z}^n\}\quad(p\in\mathbf{Z}^n)$$

で定義する．これは，通常の凸解析におけるルジャンドル変換



の離散版である．上の右図は，凸関数が接線によって復元できる（包絡線になっている）ことを示している．

M$^\natural$凸関数とL$^\natural$凸関数は，ルジャンドル変換で1対1に対応する．

共役性定理

・整数値M$^\natural$凸関数 f に対し，$f^\bullet$は整数値L$^\natural$凸関数で，$f^{\bullet\bullet}=f$.

・整数値L$^\natural$凸関数 f に対し，$f^\bullet$は整数値M$^\natural$凸関数で，$f^{\bullet\bullet}=f$.

物理イメージ：電気回路で消費される電力を，電流を変数として表現するとM$^\natural$凸関数になり電圧を変数にするとL$^\natural$凸関数になる．

経済イメージ：複数の財に対する効用を考える．財が代替性をもつとき，効用関数はM$^\natural$凹関数になり，間接効用関数（価格を変数とする効用関数）はL$^\natural$凸関数になる．

離散ルジャンドル変換の凹関数版を

$$f^\circ(p)=\min\{p\cdot x-f(x)\mid x\in\mathbf{Z}^n\}\quad(p\in\mathbf{Z}^n)$$

で定義する．このとき，次の双対定理（最大・最小定理）が成り立つ．

フェンシェル型 双対定理

・整数値M$^\natural$凸関数 f と整数値M$^\natural$凹関数 h に対して

$$\min\{f(x)-h(x)\mid x\in\mathbf{Z}^n\}=\max\{h^\circ(p)-f^\bullet(p)\mid p\in\mathbf{Z}^n\}.$$

・整数値L$^\natural$凸関数 f と整数値L$^\natural$凹関数 h に対して，同じ式が成り立つ（共役性定理による）．

この定理は，マトロイドの交差定理や劣モジュラ関数の離散分離定理などの重要な定理を特殊ケースとして含んでいる．

4．離散凸解析の歴史

1935 マトロイド		Whitney, 中澤
1965 劣モジュラ関数		Edmonds
1969 凸費用ネットワーク流		伊理
1983 劣モジュラ性と凸性		Lovász, Frank, 藤重
1982 粗代替性（経済学）		Kelso–Crawford
1985 マルチモジュラ関数（OR）		Hajek
1990 付値マトロイド		Dress–Wenzel
1990 劣モジュラ整凸関数		Favati–Tardella
1998 離散凸解析の提唱（M凸／L凸関数）		室田
2000 劣モジュラ関数最小化算法		岩田–藤重–Fleischer, Schrijver
2015 グラフ構造上の離散凸解析		平井

5．参考書

室田一雄: 離散凸解析, 共立出版　2001

K. Murota: Discrete Convex Analysis, SIAM　2003

S. Fujishige: Submodular Functions and Optimization, Elsevier　2005

室田一雄: 離散凸解析の考えかた, 共立出版　2007

田村明久: 離散凸解析とゲーム理論, 朝倉書店　2009

室田一雄, 塩浦昭義: 離散凸解析と最適化アルゴリズム, 朝倉書店　2013