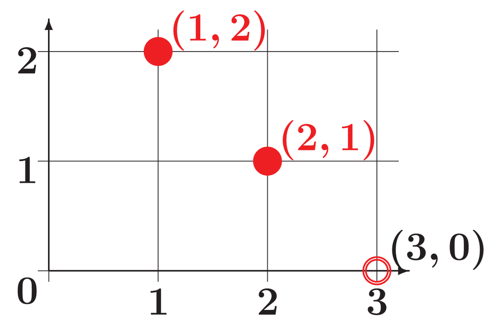
離散凸解析による辞書式最適化と公平配分

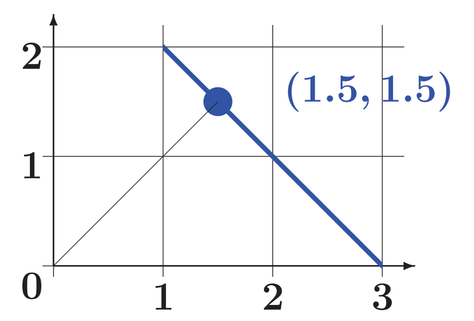
室田　一雄　　大学統計教員育成センター　特任教授

離散凸解析は，整数格子点の集合やその上で定義された関数を，凸解析と組合せ論の両方の視点から考察する理論であり，「凸関数に似た離散構造」と「離散構造をもつ凸関数」の両方を扱うことを目指している．離散最適化，オペレーションズ・リサーチ，ゲーム理論，数理経済学などへの応用がある．離散変数の公平配分問題も離散凸解析によって扱うことができる．

1　公平配分問題

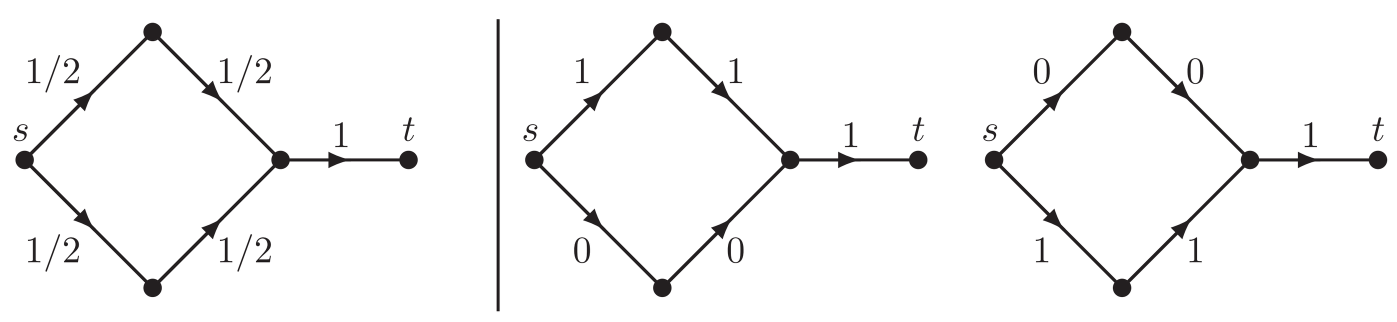
- ３つのリンゴ(apple)を２人で分ける：　　$(x_1 + x_2 = 3,\ x_1 \geq 1)$





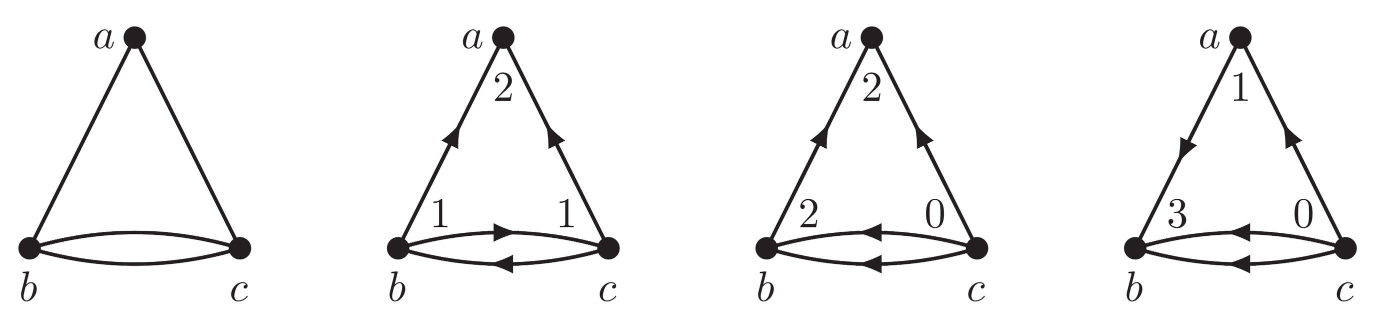
- 半分に切ってよいなら，１個半ずつ　　[連続変数]
- リンゴでなくてPCだとすると，２個と１個　　[離散変数]

- ネットワークに一様なフローを流す：水量／交通量／通信量



実数フロー　　　整数フロー

- グラフを公平に向きづける：　　[BZ17]
与えられた無向グラフGの辺に向きを与えて，各頂点に向かう有向辺の本数（入次数, in-degree）をできるだけ一様にする．



(a)　G　　(b) $x^1 = (2,1,1)$　　(c) $x^2 = (2,2,0)$　　(d) $x^3 = (1,3,0)$

(b): 公平な向き付け

降順列最小化問題

ベクトルxの成分を大きい順に並べ換えたベクトルを$x{\downarrow}$と表す（その第i成分を$x{\downarrow}_i$と表す）．ベクトルx, yに対して，$x{\downarrow}$と$y{\downarrow}$の辞書式の大小関係によって，記号$x <_{\mathrm{dec}} y$, $x \leq_{\mathrm{dec}} y$を定義する．

- $x <_{\mathrm{dec}} y$: $x{\downarrow} \neq y{\downarrow}$ で，$x{\downarrow}_i \neq y{\downarrow}_i$ である最小のiに対して$x{\downarrow}_i < y{\downarrow}_i$.
- $x \leq_{\mathrm{dec}} y$: $x{\downarrow} = y{\downarrow}$ または $x <_{\mathrm{dec}} y$.

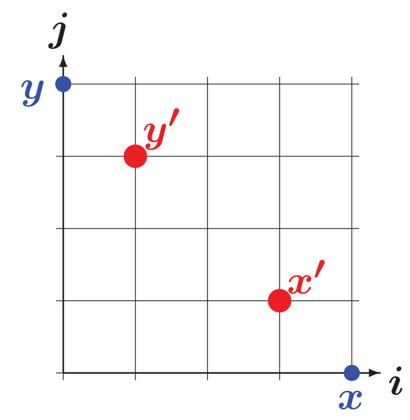
例：$x = (2,5,4,1,4)$, $y = (1,5,5,4,1)$のとき，$x{\downarrow} = (5,4,4,2,1)$, $y{\downarrow} = (5,5,4,1,1)$，$x{\downarrow}_1 = y{\downarrow}_1$, $x{\downarrow}_2 < y{\downarrow}_2$ より，$x <_{\mathrm{dec}} y$.

注意：任意のx, yに対して，$x \leq_{\mathrm{dec}} y$または$y \leq_{\mathrm{dec}} x$が成り立つ．（$x \neq y$でも$x{\downarrow} = y{\downarrow}$となることはある）

定義：ベクトルの集合Sの中で$\leq_{\mathrm{dec}}$に関して最小（任意の$y \in S$に対して$x \leq_{\mathrm{dec}} y$）である要素xをSの**降順最小元**とよぶ．与えられた集合の降順最小元を求める問題を**降順列最小化問題**とよぶ．

2　M凸集合上の降順列最小化

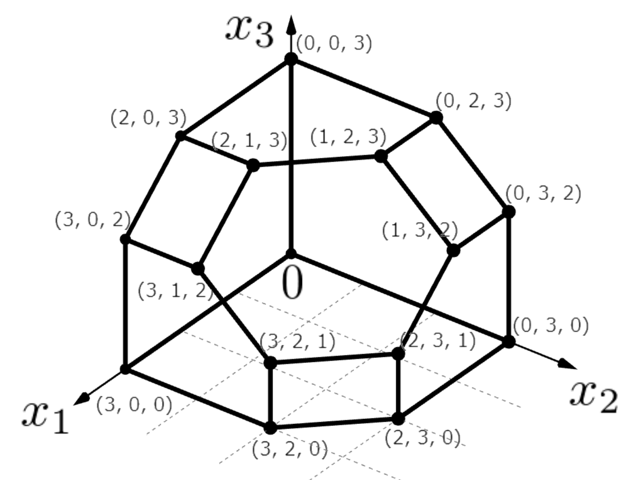
M凸集合はマトロイド的な組合せ構造をもつ離散凸集合の概念である．次の条件を満たす集合S $(\subseteq \mathbb{Z}^n)$を**M凸集合**とよぶ：

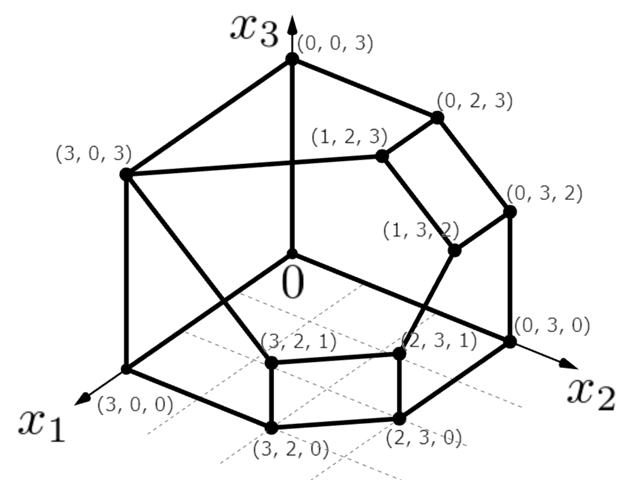


(B-EXC) 任意の$x, y \in S$と$x_i > y_i$である任意のiに対して，$x_j < y_j$であるjが存在して$x - \mathbf{1}^i + \mathbf{1}^j \in S$かつ$y + \mathbf{1}^i - \mathbf{1}^j \in S$ が成り立つ．

条件(B-EXC)から，Sに属するベクトルの成分和が一定であることが導かれる．一つの無向グラフの向き付けから得られる入次数ベクトルの全体はM凸集合を成す．

M凸集合の例（$x_1 + x_2 + x_3 = 6$を満たす整数ベクトル）：

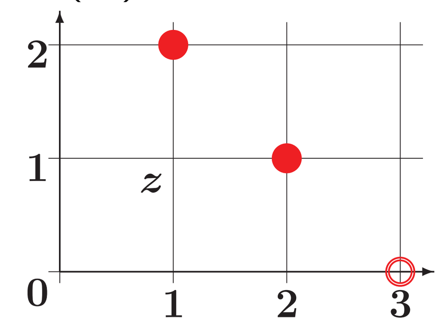




定理 2.1 [FM22] M凸集合Sの降順最小元の全体$\mathrm{decmin}(S)$は，整数ベクトルzとマトロイドの基族$\mathcal{B}$によって

$$\mathrm{decmin}(S) = \{z + \mathbf{1}^X \mid X \in \mathcal{B}\}$$

と表される．とくに，$\mathrm{decmin}(S)$はM凸集合である．

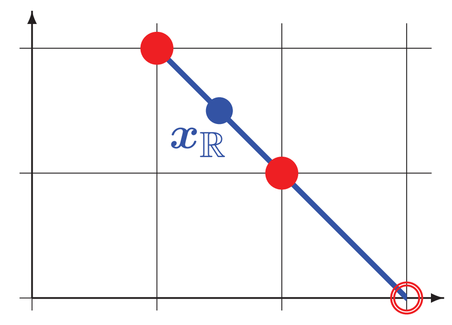


次の２つの定理は，M凸集合Sとその凸包（基多面体）において，降順最小元が互いに近くにあることを示す定理（**近接定理**）である．

定理 2.2 [FM23] M凸集合Sの凸包の降順最小元を$x^*_{\mathbb{R}}$とする．Sの任意の降順最小元$x^*_{\mathbb{Z}}$は

$$\lfloor x^*_{\mathbb{R}} \rfloor \leq x^*_{\mathbb{Z}} \leq \lceil x^*_{\mathbb{R}} \rceil$$

を満たす．



定理 2.3 [FM23] M凸集合Sの凸包の降順最小元$x^*_{\mathbb{R}}$は，Sの降順最小元の凸結合として表される．すなわち $x^*_{\mathbb{R}} \in \overline{\mathrm{decmin}(S)}$ である．

M凸集合の降順最小元を求める効率的な（強多項式時間の）アルゴリズムが知られている．

3　その他の離散凸集合上の降順列最小化

離散凸解析によるアプローチは，**M_2凸集合**（2つのM凸集合の共通部分として表される集合），ネットワークフロー，さらに一般の**整凸集合**の上の降順列最小化に統一的な視点を与える．

定理 3.1 [M24] M_2凸集合Sの降順最小元の全体$\mathrm{decmin}(S)$は，ある整数ベクトルzと2つのマトロイドの基族$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$によって

$$\mathrm{decmin}(S) = \{z + \mathbf{1}^X \mid X \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2\}$$

と表現される．とくに，$\mathrm{decmin}(S)$はM_2凸集合である．

定理 3.2 [M24] 整凸集合Sの降順最小元の全体$\mathrm{decmin}(S)$は，Sの凸包の面Fと整数ベクトルz, z'（ただし$\mathbf{0} \leq z' - z \leq \mathbf{1}$）を用いて

$$\mathrm{decmin}(S) = F \cap [z, z']_{\mathbb{Z}}$$

と表すことができる．

参考文献

[BZ17] Borradaile, Iglesias, Migler, Ochoa, Wilfong, Zhang: Egalitarian graph orientations. J. Graph Algorithms Appl. **21**, 687–708 (2017)
[FM22] Frank, Murota: Decreasing minimization on M-convex sets: Background and structures / Algorithms and applications. Math. Progr. **195**, 977–1025 / 1027–1068 (2022)
[FM23] Frank, Murota: Decreasing minimization on base-polyhedra: Relation between discrete and continuous cases. Japan J. Indus. Appl. Math. **40**, 183–221 (2023)
[M07] 室田：離散凸解析の考えかた，共立 (2007)
[M24] 室田：離散凸解析 ― 理論の拡大と応用，丸善 (2024) [13章]